Prérequis : Suites et séries de fonctions

I Généralités sur les séries entières

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe, et $a_n \in \mathbb{C}$.

Exemple 2.
— $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$
— $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

Lemme 3 (Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée, alors :*
(i) Pour tout $z \in D(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
(ii) Pour tout $r \in]0, |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$.

Définition 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ le réel R défini par :

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leqslant M \right\}$$

$D(0,R)$ s'appelle le disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

Corollaire 5. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*
(i) Pour tout $z \in D(0,R)$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$, $\sum a_n z^n$ diverge.
(iii) Pour tout $r \in]0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$.

2) Détermination du rayon de convergence

Proposition 6 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ (en convenant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).*

Proposition 7 (Règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ (en convenant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).*

Proposition 8 (Règle d'Hadamard)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ (en convenant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).*

3) Opération sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à $R > 0$ et $R' > 0$.

Définition 9. La série entière $\sum c_n z^n$ définie par $c_n = a_n + b_n$ est appelée somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geqslant \inf(R, R')$.

Définition 10. La série entière $\sum c_n z^n$ définie par $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geqslant \inf(R, R')$.

II Propriétés de la somme

1) Régularité

Théorème 11. *L'application f, appelée somme de la série entière $\sum a_n z^n$, définie par :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{n} a_n z^n \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, sa dérivée est donnée par :

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{n} n a_n z^{n-1} \end{array} \right.$$

Corollaire 12. *La somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque de convergence. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme d'une série entière. En outre :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

2) Analycité

Définition 13. Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{K}$. On dit que $f:\Omega\to\mathbb{K}$ est développable en série entière au voisinage de $a\in\Omega$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et $r>0$ tels que :

$$\forall\, z\in D(a,r),\ f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

La foncion f est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entire en chaque point de Ω.

Théorème 14. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la somme f de la série est analytique sur $D(0,R)$.*

Théorème 15 (Zéros isolés)**.** *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés.*

Corollaire 16 (Prolongement analytique)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D\subset\mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.*

Théorème 17 (Formule de Cauchy)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit f la somme de cette série entière sur son disque de convergence, alors :*

$$\forall\, r\in]0,R[,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ 2\pi r^n a_n=\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

III Comportement au bord de $D(0,R)$

Exemple 18. *La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, et cette série diverge sur tout le cercle unité.*

Exemple 19. *La série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1, et cette série converge sur tout le cercle unité.*

Exemple 20. *La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, et cette série diverge pour $z=1$ et converge pour $z=-1$.*

Théorème 21 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;1-z=\rho e^{i\varphi},\ \rho>0,\ |\varphi|<\theta\right\}\quad \textit{pour}\quad 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_\theta}} f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n$$

Théorème 22 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(z)=\ell$ existe, et $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.*

IV Applications

1) Suites récurrentes

Exemple 23. *On considère la suite $(a_n)_n$ définie par :*

$$\begin{cases} a_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=2a_n+2^n\end{cases}$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a_n=(n+2)2^{n-1}$.

Proposition 24 (Nombres de Bell)**.** *Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ avec la convention $B_0=1$, alors :*

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ B_k=\frac{1}{e}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^k}{n}$$

2) Équation différentielles

Exemple 25. *L'équation $x^2y''+4xy'+2y=e^x$ admet $x\mapsto\frac{e^x-1-x}{x^2}$ comme solution développable en série entière.*

Exemple 26. *L'ensemble des solutions développables en séries entières de $xy''+y'+y=0$ est la droite vectorielle engendrée par :*

$$f:x\mapsto\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-x)^n}{(n!)^2}$$

3) Construction de l'exponentielle complexe

Définition 27. On pose :

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) = e^z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

Théorème 28. exp *est une surjection de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}^\star$.

Définition 29. On pose :

$$\cos : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{array} \right.$$

Corollaire 30.
— $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos z = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
— $\forall z \in \mathbb{C},\ \sin z = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Développements

— Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible (21,22) [Gou]
— Nombres de Bell (24) [FGN]

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1.* Cassini